Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego

Justyna Klewicka
Konsultacja merytoryczna
Mgr inż. Piotr Beling

02/02/16

Trochę teorii

Funkcja Sprague'a-Grundy'ego:

jest określona rekurencyjnie

F(p)=0 dla pozycji p, dla której nie można wykonać ruchu

F(k)= mex(A) gdzie A, to zbiór wartości funkcji F dla pozycji, do których możemy dojść w jednym ruchu z pozycji k.

Gracz ma w pozycji p ruch zapewniający wygraną wtedy i tylko wtedy, gdy F(p)≠0

Zasady gry Nim

- W grze bierze udział dwójka graczy.
- Wygrywa ten gracz, który zbierze ostatni klocek i w ten sposób uniemożliwi graczowi drugiemu wykonanie następnego ruchu.
- W każdym ruchu gracz może zebrać 1 lub więcej żetonów z wybranego stosu.

- Użyjemy twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego do znalezienia strategii wygrywającej w przypadku gry Nim, w której mamy trzy stosy żetonów. Pierwszy z nich posiada 6, drugi 7, natomiast trzeci 5 klocków.
- Wartość funkcji Sprague'a-Grundy'ego wyraża się wzorem:

$$F(P_1,P_2,...,P_n)=F(P_1)\oplus F(P_2)\oplus\ldots\oplus F(P_n)$$

gdzie $\oplus$ oznacza operację xor na tych liczbach.

- Dla każdego z trzech stosów należy wyliczyć nimliczbę – liczbę porządkową w tym przypadku równą wielkości słupka.
- Dla pierwszego stosu nimliczba będzie wynosić 6, ponieważ właśnie taki jest rozmiar tego stosu.
- Nimliczby dwóch następnych stosów będą wynosić kolejno 7 i 5.

$F(P_1)=F(6)=6$
$F(P_2)=F(7)=7$
$F(P_3)=F(5)=5$

Zgodnie z twierdzeniem Sprague'a-Grundy'ego, wartość funkcji F w tym przypadku będzie się równać

$F(6,7,5)=F(6)\oplus F(7)\oplus F(5)$

W celu poddania nimliczb operacji xor należy wyznaczyć ich cyfry rozwinięcia dwójkowego.

Rozwinięcia dwójkowe nimliczb:

1. stos: 110
2. stos: 111
3. stos: 101

	1	1	0
	1	1	1
	1	0	1
XOR	1	0	0

Wartość różna od 0 oznacza istnienie ruchu zapewniającego zwycięstwo. Dla naszych stosów jest ona równa 100_2. Musimy zabrać tyle żetonów z określonego stosu, by po ich usunięciu operacja XOR dała wynik równy 0.

	1	1	0
	1	1	1
	1	0	1
XOR	1	0	0

W tym przypadku, żeby wyzerować wynik należy sprawić, by w pierwszej kolumnie znajdowała się parzysta liczba jedynek (XOR dwóch takich samych wartości wynosi 0). Pozostałych kolumn nie można ruszać, ponieważ wtedy otrzymamy cyfrę którejś z kolumn wyniku równą 1.

Liczba 100_2 po konwersji na system dziesiętny wynosi 4. Spróbujmy usunąć 4 żetony z któregoś ze stosów.

1. przypadek: 4 żetony usunięte z pierwszego stosu

	0	1	0
	1	1	1
	1	0	1
XOR	0	0	0

2. przypadek: 4 żetony usunięte z drugiego stosu

	1	1	0
	0	1	1
	1	0	1
XOR	0	0	0

3. przypadek: 4 żetony usunięte z trzeciego stosu

	1	1	0
	1	1	1
	0	0	1
XOR	0	0	0

Strategią wygrywającą dla pierwszego gracza jest usunięcie 4 klocków z dowolnego stosu.

Koniec