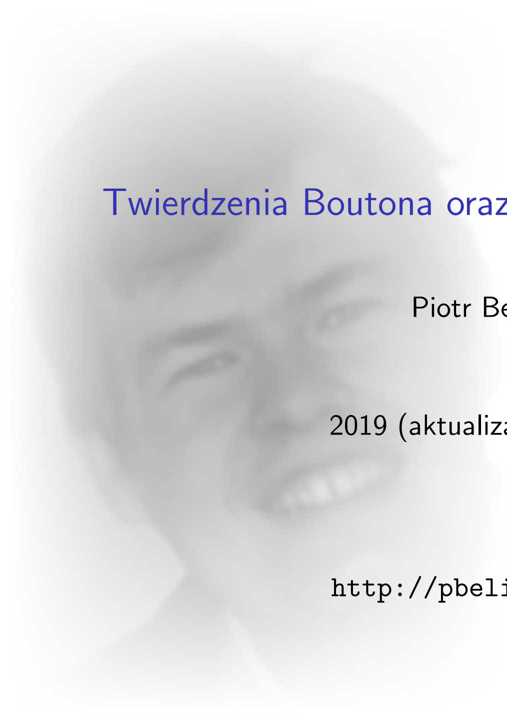


Twierdzenia Boutona oraz Sprague'a-Grundy'ego

Piotr Beling

2019 (aktualizacja: 2021)

http://pbeling.w8.pl

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przedmiot zainteresowań:

Będziemy rozpatrywali gry:

- **dwuosobowe**; dwóch graczy wykonuje ruchy naprzemiennie;
- **skończone**; kończące się po wykonaniu skończonej liczby ruchów; o skończonej liczbie pozycji i bez pętli;
- **normalne**; przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu;
- **bezstronne**; w danej pozycji gracze dysponują tymi samymi ruchami, np. brak rozróżnienia na białe i czarne piony poruszane przez różnych graczy;
- z **pełną** i **doskonałą informacją**; gracze znają wszystkie zasady gry i w pełni obserwują jej aktualny stan oraz przebieg;
- **deterministyczne**; bez elementów losowych takich jak np. rzucanie kostką czy rozdawania kart.

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

  | ||| ||

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

  | | ||

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

  | |

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

  |

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

  | ||| ||

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

  | | ||

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

  | |

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

  |

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

  / /\\ /\

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

  / / /\

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

  / /

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

  /

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

  / /\\ /\

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

  / / /\

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

  / /

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

  /

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Przykładowa gra: Nim

- Na planszy znajduje się kilka stosów patyczków, np.

  / /\\ /\

- Ruch polega na zabraniu dowolnej, niezerowej liczby patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu,
- np. w powyższej sytuacji można zabrać dwa patyczki z drugiego stosu, doprowadzając do pozycji:

  / / /\

- Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek/stos.
- Przykładowo, po zabraniu całego ostatniego stosu, otrzymamy

  / /

- przeciwnik zostanie zmuszony do pozostawienia jednego stosu

  /

- i teraz jedyny możliwy ruch daje wygraną (pustą planszę).

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Definicje:

- **Skończona gra bezstronna** (dalej nazywa krótko: **grą**) to skończony zbiór skończonych gier bezstronnych.
- Elementy tego zbioru definiują dostępne dla idącego gracza **ruchy** i nazywamy je **opcjami**.
- Wykonanie ruchu polega na wybraniu jednej z opcji.
- Dwóch graczy wykonuje ruchy na przemian, aż do osiągnięcia gry pustej.
- Wygrywa gracz, który wykonał ostatni ruch.
- **Pozycja w grze** G to każde gra uzyskana z G poprzez wykonanie pewnej, dozwolonej sekwencji ruchów.
- **Pozycją gry** G jest więc zarówno sama gra G jak i wszystkie pozycje wszystkich opcji G.
- Gra jest tożsama ze swoją pozycją początkową.

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Gry wygrane, przegrane, oraz rozwiązane

- **Strategia** (czysta) gracza to funkcja, która
  - każdej niepustej pozycji w grze
  - przyporządkowuje jedną z dostępnych w tej pozycji opcji (tj. określa ruch, który wykona gracz w tej pozycji).
- **Gra jest wygrana** (gracz rozpoczynający ma **strategię wygrywającą**) jeśli gracz rozpoczynający może tę grę wygrać bez względu na strategię stosowaną przez przeciwnika.
- **Gra jest przegrana** (gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej, zaś ma ją jego przeciwnik) – przeciwnik może wygrać bez względu na strategię gracza rozpoczynającego.
- Każda gra jest albo wygrana, albo przegrana.
- **Słabe rozwiązanie gry** – określenie czy gra jest wygrana.
- **Silne rozwiązanie gry** – znalezienie strategii wygrywającej (dla gracza, który ową strategię posiada).

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return *No winning move!*

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Rozwiązywanie gier

- Zauważmy, że gra jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy zawiera przegraną opcję (ta opcja może być nawet pusta).
- Ruch do tej opcji umożliwia zwycięstwo, gdyż zmusza przeciwnika do wykonania ruchu w grze przegranej.
- Zaś gra przegrana to taka, która nie zawiera przegranej opcji.
- To rozumowanie możemy wykorzystać, by:

• rekurencyjnie sprawdzić, czy gra jest przegrana:

```
function is_losing(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return false
  return true
```

• znaleźć wygrywający ruch (jeśli istnieje):

```
function winning_move(G):
  foreach O ∈ G:
    if is_losing(O):
      return O
  return No winning move!
```

- Jednakże czas działania tych algorytmów jest w przypadku wielu gier nieakceptowalny.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*", 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*", 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*", 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

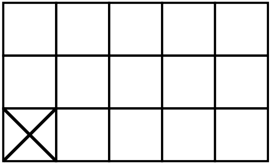
Przykłady wygranych/przegranych pozycji w grze Nim

- Pozycja składająca się z jednego stosu jest wygrana (można zabrać wszystkie patyczki).
- Pozycja składająca się z dwóch stosów jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy są one różnej wielkości.
- Strategia wygrywająca: należy wyrównać stosy.
- Przy dwóch stosach równych gracz zmuszony jest zabrać coś z jednego z nich i pozostawić je różnej wielkości, co oznacza:
  - przymus usunięcia całego stosu gdy mają one po 1 patyczku,
  - możliwość wykonania kolejnego ruchu (wyrównania stosów) przez przeciwnika.
- Dla trzech lub większej liczby stosów gra Nim jest niebanalna.
- Pomimo to, w 1901 roku grę rozwiązał amerykański matematyk Charles Leonard Bouton[1].
- Jego wynik dał podwaliny kombinatorycznej teorii gier.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*”, 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

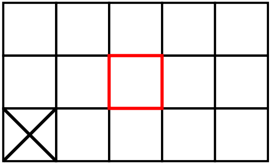
Przykład: Chomp – zasady gry

- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.



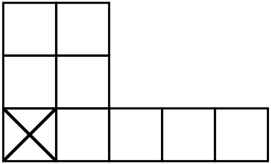
Przykład: Chomp – zasady gry

- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.



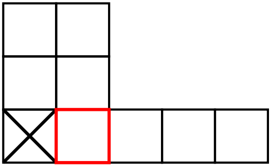
Przykład: Chomp – zasady gry

- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.



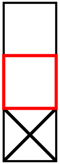
Przykład: Chomp – zasady gry

- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.



Przykład: Chomp – zasady gry

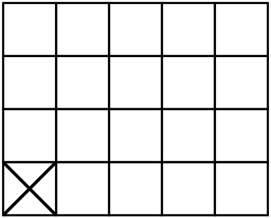
- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.



Przykład: Chomp – zasady gry

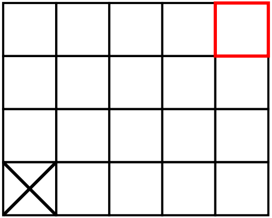
- Planszą w grze Chomp jest tabliczka czekolady, której kostka w lewym dolnym rogu jest zatruta.
- Ruch polega na wybraniu dowolnej, niezatrutej kostki i zjedzeniu jej wraz ze wszystkimi kostkami leżącymi powyżej i na prawo.
- Gra toczy się aż do osiągnięcia pozycji końcowej (bez opcji), którą jest pojedyncza, zatruta kostka.
- Wygrywa gracz który wykonał ostatni ruch.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



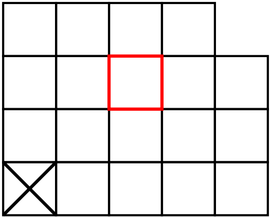
- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



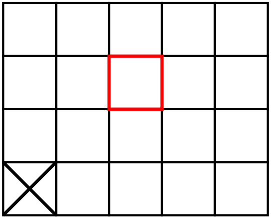
- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



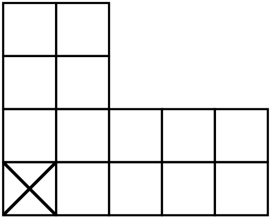
- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



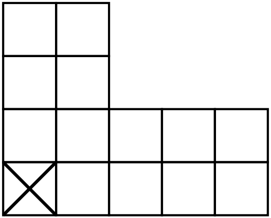
- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



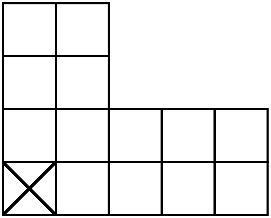
- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Przykład: Chomp jako gra rozwiązana słabo



- Gra Chomp o wymiarach $m \times n$, dla $m > 1$ lub $n > 1$ jest wygrana (dla gracza który rozpoczyna).
- Wygrywającym ruchem jest:
  - albo zabranie pojedynczej kostki z górnego prawego rogu,
  - albo jakaś odpowiedź na zabranie tej pojedynczej kostki.
- Ta druga opcja jest jednak dostępna także na początku gry.
- Więc jeśli daje ona wygraną, to może za jej pomocą wygrać gracz rozpoczynający całą grę.
- Przedstawione rozwiązanie jest jednak bardzo słabe.
- Nie znamy ani strategii wygrywającej, ani nie wiemy nawet którym ruchem rozpocząć grę, by wygrać.

Niech:

- $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ to gra Nim o n stosach, w których jest kolejno $a_1, a_2, \ldots, a_n$ patyczków,
- $\oplus$ to bitowa operacja xor, zwana też: sumą modulo 2 bez przeniesień, bitową alternatywa wykluczającą, bitowym „albo", nim-sumą.

Twierdzenie Boutona[1]

Gra $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ jest wygrana wtedy i tylko wtedy gdy

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$$

(w przeciwnym wypadku gra jest przegrana).

Liczbę $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ nazywamy nim-sumą albo nimberem gry $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$.

[1] C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*", 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.

Twierdzenie Boutona – przykład

Zbadamy czy gra jest wygrana?

$= \langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$

Policzmy nim-sumę gry (nimber):

$$
\begin{array}{r|r}
3_{10} = & 011_2 \\
4_{10} = & \oplus 100_2 \\
5_{10} = & \oplus 101_2 \\
\hline
 & = 010_2
\end{array}
$$

Ponieważ $010_2 \neq 0$, to gra $\langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ jest wygrana.

Wygrywające jest zabranie 2 patyczków z pierwszego stosu, co doprowadzi do gry $\langle 1, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ o nimberze 0 (czyli przegranej).

$$
\begin{array}{r|r}
1_{10} = & 001_2 \\
4_{10} = & \oplus 100_2 \\
5_{10} = & \oplus 101_2 \\
\hline
 & = 000_2
\end{array}
$$

Twierdzenie Boutona – przykład

Zbadamy czy gra jest wygrana?  $= \langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$

Policzmy nim-sumę gry (nimber):

$$\begin{array}{r|r} 3_{10} = & 011_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 010_2 \end{array}$$

Ponieważ $010_2 \neq 0$, to gra $\langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ jest wygrana.

Wygrywające jest zabranie 2 patyczków z pierwszego stosu, co doprowadzi do gry $\langle 1, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ o nimberze 0 (czyli przegranej).

$$\begin{array}{r|r} 1_{10} = & 001_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 000_2 \end{array}$$

Twierdzenie Boutona – przykład

Zbadamy czy gra jest wygrana?  $= \langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$

Policzmy nim-sumę gry (nimber):

$$\begin{array}{r|r} 3_{10} = & 011_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 010_2 \end{array}$$

Ponieważ $010_2 \neq 0$, to gra $\langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ jest wygrana.

Wygrywające jest zabranie 2 patyczków z pierwszego stosu, co doprowadzi do gry $\langle 1, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ o nimberze 0 (czyli przegranej).

$$\begin{array}{r|r} 1_{10} = & 001_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 000_2 \end{array}$$

Twierdzenie Boutona – przykład

Zbadamy czy gra jest wygrana?

$= \langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$

Policzmy nim-sumę gry (nimber):

$$\begin{array}{r|r} 3_{10} = & 011_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 010_2 \end{array}$$

Ponieważ $010_2 \neq 0$, to gra $\langle 3, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ jest wygrana.

Wygrywające jest zabranie 2 patyczków z pierwszego stosu, co doprowadzi do gry $\langle 1, 4, 5 \rangle_{\mathfrak{N}}$ o nimberze 0 (czyli przegranej).

$$\begin{array}{r|r} 1_{10} = & 001_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 5_{10} = & \oplus 101_2 \\ \hline & = 000_2 \end{array}$$

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Boutona – dowód

- Teza wynika z dwóch lematów (dowiedzionych później):
  1. pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0,
  2. pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0.
- Z lematu 2 wynika, że gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Z lematu 1 wynika, że po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta i stanie się on zwycięzcą.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\
&= s \oplus a_k \oplus b.
\end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\
&= s \oplus a_k \oplus b.
\end{aligned}
$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\
&= s \oplus a_k \oplus b.
\end{aligned}
$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\
&= s \oplus a_k \oplus b.
\end{aligned}
$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\
&= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\
&= s \oplus a_k \oplus b.
\end{aligned}
$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Własności nim-sumy (xor)

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych, naturalnych x, y, z:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (łączność),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (przemienność),
3. $x \oplus y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
4. $x \oplus 0 = x$ (0 jest elementem neutralnym).

Rozważmy dowolną nim-sumę $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.
Niech t będzie nim-sumą otrzymaną przez zamianę w s dowolnego składnika a_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) na dowolne $b \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus 0 \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus b \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus a_k \\ &= a_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1} \oplus a_k \oplus a_{k+1} \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_k \oplus b \\ &= s \oplus a_k \oplus b. \end{aligned}$$

Zauważmy że jeśli $a_k \neq b$, to $a_k \oplus b \neq 0$, i ostatecznie $s \neq t$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 1 (pozycja o nimberze 0 nie zawiera opcji o nimberze 0)

- Niech $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ będzie dowolną grą Nim, zaś $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ jej nim-sumą.
- Niech $O = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $b < a_k$ będzie dowolnie wybraną opcją G.
- Nim-suma O wynosi $t = s \oplus a_k \oplus b$.
- Ponieważ zaś $a_k \neq b$ to $t \neq s$.
- Zatem każda opcja G ma nimber różny od samego G.
- W szczególności zachodzi teza lematu (jeśli $s = 0$ to $t \neq 0$).

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0.$

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110
b	10010

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110
b	10010

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
a_2	10100
a_3	11001
s	00110
b	10010

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze $s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0$.

Twierdzenie Boutona – dowód lematu 2 (pozycja o nimberze różnym od 0 zawiera opcję o nimberze 0)

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

a_1	01011
b	10010
a_3	11001
	00000
b	10010

- Niech: $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$ – dowolny Nim o niezerowej nim-sumie, $s = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
- i – najstarsza pozycja, taka że $s[i] = 1$ (taka pozycja istnieje, gdyż $s \neq 0$),
- k – dowolny indeks stosu, taki że $a_k[i] = 1$ (ponieważ $s[i] = 1$ to istnieje nieparzysta, więc niezerowa, liczba stosów spełniająca ten warunek),
- $b = s \oplus a_k$.
- $b < a_k$, gdyż:
  - dla wszystkich $j > i$: $b[j] = a_k[j]$ bo $s[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $a_k[i] = s[i]$, skąd $b[i] < 1 = a_k[i]$.

Zmniejszenie stosu a_k do b prowadzi do opcji o nimberze
$s \oplus a_k \oplus b = s \oplus a_k \oplus (s \oplus a_k) = (s \oplus s) \oplus (a_k \oplus a_k) = 0.$

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – idea

- Dowolną grę Nim $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, możemy potraktować jako grę złożoną z n jednostosowych gier Nim $\langle a_1 \rangle_{\mathfrak{N}}, \langle a_2 \rangle_{\mathfrak{N}}, \ldots, \langle a_n \rangle_{\mathfrak{N}}$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej.
- Zauważmy, że nimber jednostosowej gry Nim $\langle a \rangle_{\mathfrak{N}}$ wynosi a.
- Twierdzenie Boutona mówi więc o zależności pomiędzy wynikiem gry złożonej i nimberami jej składników, którymi są jednostosowe gry Nim.
- Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego uogólnia je na przypadek, gdy grami składowymi są dowolne gry bezstronne.
- Cechą jednostosowej gry Nim/nimbera, którą wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Boutona jest to, że każdy ruch:
  - zmienia wysokość stosu/nimbera (konkretnie go pomniejsza, ale ten fakt nie był wykorzystany),
  - umożliwia dowolne pomniejszenie wysokości stosu/nimbera.
- Pozostałym grom bezstronnym nimbery przypisuje się w taki sposób, by zachować wspomniane cechy.

Definicja funkcji mex (*m*inimum *ex*cluded)

Funkcja $\mathrm{mex} : 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dowolnemu zbiorowi X, będącemu właściwym podzbiorem $\mathbb{N}$, przyporządkowuje najmniejszą liczbę naturalną niezawartą w X:

$$\mathrm{mex}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X).$$

Przykładowo: $\mathrm{mex}\{0,1,3,4\} = 2$, $\mathrm{mex}\{1,2,5\} = 0$, $\mathrm{mex}(\emptyset) = 0$.

Definicja funkcji Grundy'ego (przypisującej nimbery)

Funkcję Grundy'ego g, która dowolnej, skończonej grze bezstronnej przyporządkowuje liczbę naturalną zwaną *nimberem* tej gry, definiujemy jako

$$g(G) = \mathrm{mex}\{g(O) : O \in G\}.$$

Definicja funkcji mex (*m*inimum *ex*cluded)

Funkcja $\mathrm{mex} : 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dowolnemu zbiorowi X, będącemu właściwym podzbiorem $\mathbb{N}$, przyporządkowuje najmniejszą liczbę naturalną niezawartą w X:

$$\mathrm{mex}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X).$$

Przykładowo: $\mathrm{mex}\{0, 1, 3, 4\} = 2$, $\mathrm{mex}\{1, 2, 5\} = 0$, $\mathrm{mex}(\emptyset) = 0$.

Definicja funkcji Grundy'ego (przypisującej nimbery)

Funkcję Grundy'ego g, która dowolnej, skończonej grze bezstronnej przyporządkowuje liczbę naturalną zwaną *nimberem* tej gry, definiujemy jako

$$g(G) = \mathrm{mex}\{g(O) : O \in G\}.$$

Definicja funkcji mex (*m*inimum *ex*cluded)

Funkcja $\mathrm{mex} : 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dowolnemu zbiorowi X, będącemu właściwym podzbiorem $\mathbb{N}$, przyporządkowuje najmniejszą liczbę naturalną niezawartą w X:

$$\mathrm{mex}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X).$$

Przykładowo: $\mathrm{mex}\{0, 1, 3, 4\} = 2$, $\mathrm{mex}\{1, 2, 5\} = 0$, $\mathrm{mex}(\emptyset) = 0$.

Definicja funkcji Grundy'ego (przypisującej nimbery)

Funkcję Grundy'ego g, która dowolnej, skończonej grze bezstronnej przyporządkowuje liczbę naturalną zwaną *nimberem* tej gry, definiujemy jako

$$g(G) = \mathrm{mex}\{g(O) : O \in G\}.$$

Wartości funkcji Grundy'ego dla jednostosowego Nima

$$g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}) = \mathsf{mex}(\emptyset) = 0,$$

Wartości funkcji Grundy'ego dla jednostosowego Nima

$$g(\langle 0 \rangle_{\mathfrak{N}}) = \mathsf{mex}(\emptyset) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\langle 1 \rangle_{\mathfrak{N}}) &= \mathsf{mex}\,\{g(\langle 0 \rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \mathsf{mex}\,\{0\} = 1, \end{aligned}$$

Wartości funkcji Grundy'ego dla jednostosowego Nima

$$g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}) = \operatorname{mex}(\emptyset) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\langle 1\rangle_{\mathfrak{N}}) &= \operatorname{mex}\{g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \operatorname{mex}\{0\} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\langle 2\rangle_{\mathfrak{N}}) &= \operatorname{mex}\{g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}), g(\langle 1\rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \operatorname{mex}\{0, 1\} = 2, \end{aligned}$$

Wartości funkcji Grundy'ego dla jednostosowego Nima

$$g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}) = \mathrm{mex}(\emptyset) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\langle 1\rangle_{\mathfrak{N}}) &= \mathrm{mex}\,\{g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \mathrm{mex}\,\{0\} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\langle 2\rangle_{\mathfrak{N}}) &= \mathrm{mex}\,\{g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}), g(\langle 1\rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \mathrm{mex}\,\{0, 1\} = 2, \end{aligned}$$

...

Ogólnie:

$$\begin{aligned} g(\langle n\rangle_{\mathfrak{N}}) &= \mathrm{mex}\,\{g(\langle 0\rangle_{\mathfrak{N}}), g(\langle 1\rangle_{\mathfrak{N}}), \ldots, g(\langle n-1\rangle_{\mathfrak{N}})\} \\ &= \mathrm{mex}\,\{0, 1, \ldots, n-1\} = n. \end{aligned}$$

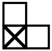
Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
$\boxtimes$	n/d	$\emptyset$	0

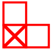
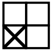
Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1

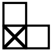
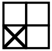
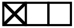
Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1
	n/d	$1, 1$	0

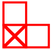
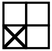
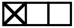
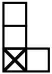
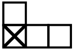
Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1
	n/d	$1, 1$	0
	n/d	$1, 1, 0$	2

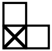
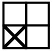
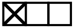
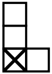
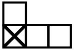
Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1
	n/d	$1, 1$	0
	n/d	$1, 1, 0$	2
		$0, 1$	2

Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1
	n/d	$1, 1$	0
	n/d	$1, 1, 0$	2
		$0, 1$	2
		$1, 0, 2$	3

Przykład: wartości funkcji Grundy'ego dla Chompa

Pozycja P	obroty, odbicia P	Nimbery opcji P	$g(P)$
	n/d	$\emptyset$	0
		0	1
	n/d	$1, 1$	0
	n/d	$1, 1, 0$	2
		$0, 1$	2
		$1, 0, 2$	3

Twierdzenie Sprague'a[1]-Grundy'ego[2]

1. Dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$.
2. $$g(\langle G_1, \ldots, G_n \rangle) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

   gdzie:
   - $\langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ to bezstronna gra złożona z gier $G_1, \ldots, G_n$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej, tj. zbiór opcji stanowią wszystkie gry postaci $\langle G_1, \ldots, G_{k-1}, O, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $O \in G_k$ i $k \in \{1, \ldots, n\}$;
   - $G_1, \ldots, G_n$ to dowolne, skończone gry bezstronne;
   - $n \in \mathbb{N}$.

[1] R. P. Sprague, „*Über mathematische Kampfspiele*", 1935-36, Tohoku Mathematical Journal, 41: 438-444.

[2] P. M. Grundy „*Mathematics and games*", 1939, Eureka, 2: 6-8.

Twierdzenie Sprague'a[1]-Grundy'ego[2]

1. Dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$.
2. $$g(\langle G_1, \ldots, G_n \rangle) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

   gdzie:
   - $\langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ to bezstronna gra złożona z gier $G_1, \ldots, G_n$, w której ruch polega na wykonaniu ruchu w jednej, wybranej grze składowej, tj. zbiór opcji stanowią wszystkie gry postaci $\langle G_1, \ldots, G_{k-1}, O, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $O \in G_k$ i $k \in \{1, \ldots, n\}$;
   - $G_1, \ldots, G_n$ to dowolne, skończone gry bezstronne;
   - $n \in \mathbb{N}$.

[1] R. P. Sprague, „*Über mathematische Kampfspiele*", 1935-36, Tohoku Mathematical Journal, 41: 438-444.

[2] P. M. Grundy „*Mathematics and games*", 1939, Eureka, 2: 6-8.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 1

Część twierdzenia mówiąca że dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$ wynika wprost z definicji g:

- Gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta ($g(\emptyset) = 0$) i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 1

Część twierdzenia mówiąca że dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$ wynika wprost z definicji g:

- Gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta ($g(\emptyset) = 0$) i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 1

Część twierdzenia mówiąca że dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$ wynika wprost z definicji g:

- Gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta ($g(\emptyset) = 0$) i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 1

Część twierdzenia mówiąca że dowolna skończona gra bezstronna G jest wygrana wtedy i tylko wtedy, gdy $g(G) \neq 0$ wynika wprost z definicji g:

- Gracz wykonujący ruchy w pozycjach o niezerowym nimberze zawsze będzie mógł wybrać opcje o nimberze 0.
- Po każdym takim ruchu (ogólniej, w każdej pozycji o zerowym nimberze), przeciwnik będzie zmuszony do wybrania opcji, której nimber ponownie będzie niezerowy.
- W końcu wybraną przez pierwszego z graczy opcją (o nimberze 0) będzie gra pusta ($g(\emptyset) = 0$) i stanie się on zwycięzcą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód części 2

By dowieść, że $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$ jest nimberem gry $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$ (tj. że $s = g(G)$) musimy pokazać (zgodnie z definicją g) dwa fakty:

1. wszystkie opcje G mają nimbery różne od s,
2. G ma opcję o nimberze $t \in \mathbb{N}$ dla każdego $t < s$.

Powyższe fakty są odpowiednikami lematów 1 i 2 sformowanych przy okazji dowodzenia twierdzenia Boutona.

Oba fakty pokażemy indukcyjnie, tj. wykażemy że zachodzą one przy założeniu, że twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego zachodzi dla wszystkich opcji G.

Zauważmy, że zachodzi ono gdy G jest grą pustą (wtedy także $G_1, \ldots, G_n$ są puste i $g(G) = 0 = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$).

Dalej więc będziemy dowodzić przy założeniu, że G (więc i co najmniej jedna z gier $G_1, \ldots, G_n$) nie jest grą pustą.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 1

- Niech $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$,
- $O = \langle G_1, \ldots, G_{k-1}, B, G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle$, dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $B \in G_k$ – dowolnie wybrana opcja G.
- Z założenia indukcyjnego mamy

$$g(O) = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_{k-1}) \oplus g(B) \oplus g(G_{k+1}) \oplus \ldots \oplus g(G_n),$$

- stąd zaś i z własności nim-sumy (slajd 12)

$$g(O) = s \oplus g(G_k) \oplus g(B).$$

- Ponieważ zaś (z definicji g i faktu $B \in G_k$) $g(G_k) \neq g(B)$ to $g(O) \neq g(G)$.
- Zaś z dowolności wyboru O otrzymujemy tezę faktu 1 (każda opcja G ma nimber różny od s).

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011

- Niech: $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \dots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011
b	1000

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011
b	1000

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011
b	1000

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
$g(G_3)$	1011
s	0110
t	0101
d	0011
b	1000

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – dowód faktu 2

Notacja: $x[i]$ – cyfra na i-tej pozycji binarnej reprezentacji x.

Przykład:

$g(G_1)$	0100
$g(G_2)$	1001
b	1000
t	0101
t	0101
d	0011
b	1000

- Niech: $G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $s = g(G_1) \oplus \ldots \oplus g(G_n)$.
- Rozważmy dowolne naturalne $t < s$.
- Niech $d = t \oplus s$, zaś i – najstarsza pozycja, taka że $d[i] = 1$ (lub równoważnie, że $s[i] \neq t[i]$).
- Ponieważ $t < s$ to $s[i] = 1$ i $t[i] = 0$.
- k – dowolny indeks, taki że $g(G_k)[i] = 1$ (takie k istnieje bo $s[i] = 1$),
- Niech $b = d \oplus g(G_k)$. $b < g(G_k)$, gdyż:
  - dla każdego $j > i$: $b[j] = g(G_k)[j]$ bo $d[j] = 0$,
  - $b[i] = 0$ bo $g(G_k)[i] = s[i]$, skąd $b[i] < g(G_k)[i]$.
- $b < g(G_k)$ więc G_k ma opcję o nimberze b.

Zaś z założenia indukcyjnego (dla ruchu wykorzystującego tę opcję) i własności nim-sumy (slajd 12), G ma opcję o nimberze $s \oplus g(G_k) \oplus b = s \oplus g(G_k) \oplus d \oplus g(G_k) = s \oplus d = s \oplus t \oplus s = t$.

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 2_{10} = & \oplus 010_2 \\ \hline & = 011_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 2_{10} = & \oplus 010_2 \\ \hline & = 011_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 2_{10} = & \oplus 010_2 \\ \hline & = 011_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa
oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 2_{10} = & \oplus 010_2 \\ \hline & = 0{\color{red}1}1_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

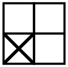
Rozważmy grę złożoną z Chompa oraz dwóch stosów Nima:

$$
\begin{array}{r|r}
5_{10} = & 101_2 \\
4_{10} = & \oplus 100_2 \\
2_{10} = & \oplus 010_2 \\
\hline
 & = 011_2
\end{array}
$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa
oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ & \oplus 0{\color{red}1}0_2 \\ \hline & = 0{\color{red}1}1_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa oraz dwóch stosów Nima:

$$
\begin{array}{r|r}
5_{10} = & 101_2 \\
4_{10} = & \oplus 100_2 \\
 & \oplus 001_2 \\
\hline
 & = 000_2
\end{array}
$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

Rozważmy grę złożoną z Chompa
oraz dwóch stosów Nima:

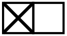
$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ & \oplus 001_2 \\ \hline & = 000_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego – przykład

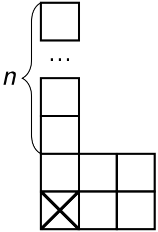
Rozważmy grę złożoną z Chompa
oraz dwóch stosów Nima:

$$\begin{array}{r|r} 5_{10} = & 101_2 \\ 4_{10} = & \oplus 100_2 \\ 1_{10} = & \oplus 001_2 \\ \hline & = 000_2 \end{array}$$

- Nimbery stosów Nima są równe liczbą patyczków (slajd 17), czyli 5 i 4, zaś nimber Chompa to 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber całej gry to $5 \oplus 4 \oplus 2 = 3$ i że gra jest wygrana (bo $3 \neq 0$).
- By wyznaczyć zwycięski ruch, badamy binarne reprezentacje nimberów: znajdujemy pozycję najstarszej 1 w nim-sumie;
- w grze mającej 1 na tej pozycji (tj. w Chompie) gramy tak, by zmienić tę 1 na 0, oraz młodsze cyfry tak, by wyzerować nim-sumę (ustawiamy je na xor pozostałych składowych).
- Czyli gramy w Chompie do opcji o nimberze 1:  lub 

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

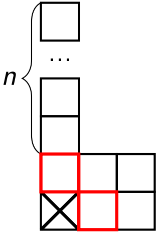
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

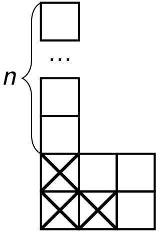
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

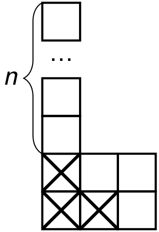
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

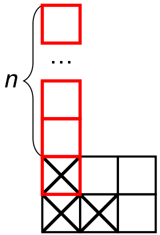
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

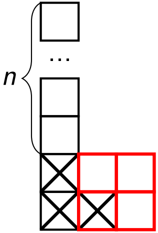
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

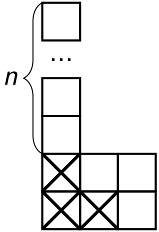
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n + 1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

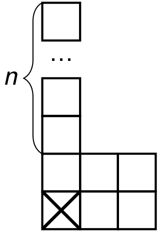
Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
    1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
    2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Przykład dekompozycji pozycji Chompa

Zbadamy, dla jakich wartości n wygrana jest następująca gra Chomp:



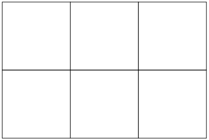
- Zauważmy że zjedzenie którejkolwiek z dwóch kostek przyległych do kostki zatrutej daje przeciwnikowi możliwość natychmiastowej wygranej poprzez zjedzenie drugiej z nich.
- Bez wpływu na istnienie strategii wygrywającej któregokolwiek gracza, możemy więc zakazać zjadania tych kostek, jak gdyby były zatrute.
- Otrzymamy grę, którą możemy traktować jak złożoną z:
  1. Chompa $(n+1) \times 1$, który jest równoważny stosowi Nim-a o n patyczkach, więc jego nimber wynosi n (slajd 17),
  2. Chompa 2×2, o nimberze 2 (slajd 18).
- Z twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego otrzymujemy, że nimber tej gry to $n \oplus 2$ i że jest ona wygrana wtedy i tylko wtedy gdy $n \oplus 2 \neq 0$ (lub równoważnie $n \neq 2$).
- Stąd oryginalna gra jest wygrana dla wszystkich $n \neq 2$.

Gra Cram

W grze Cram:

- rozgrywka toczy się prostokątnej planszy, podzielonej siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na zajęciu dwóch dotychczas pustych, sąsiadujących ze sobą pól (w poziomie lub w pionie);
- przegrywa gracz który nie może wykonać ruchu.

Przykładowa rozgrywka na planszy 3×2:

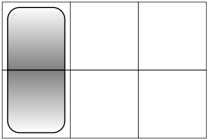


Gra Cram

W grze Cram:

- rozgrywka toczy się prostokątnej planszy, podzielonej siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na zajęciu dwóch dotychczas pustych, sąsiadujących ze sobą pól (w poziomie lub w pionie);
- przegrywa gracz który nie może wykonać ruchu.

Przykładowa rozgrywka na planszy 3×2:

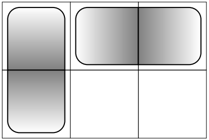


Gra Cram

W grze Cram:

- rozgrywka toczy się prostokątnej planszy, podzielonej siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na zajęciu dwóch dotychczas pustych, sąsiadujących ze sobą pól (w poziomie lub w pionie);
- przegrywa gracz który nie może wykonać ruchu.

Przykładowa rozgrywka na planszy 3×2:

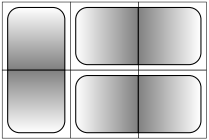


Gra Cram

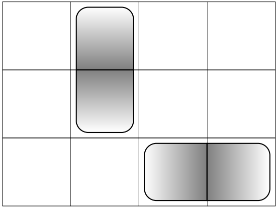
W grze Cram:

- rozgrywka toczy się prostokątnej planszy, podzielonej siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na zajęciu dwóch dotychczas pustych, sąsiadujących ze sobą pól (w poziomie lub w pionie);
- przegrywa gracz który nie może wykonać ruchu.

Przykładowa rozgrywka na planszy 3×2:

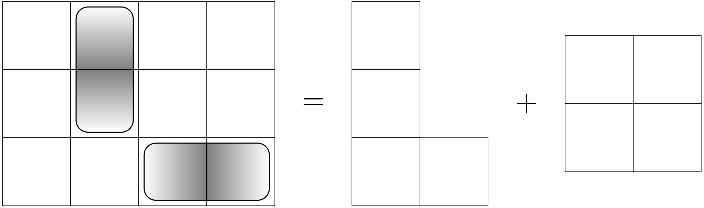


Przykład dekompozycji pozycji Crama



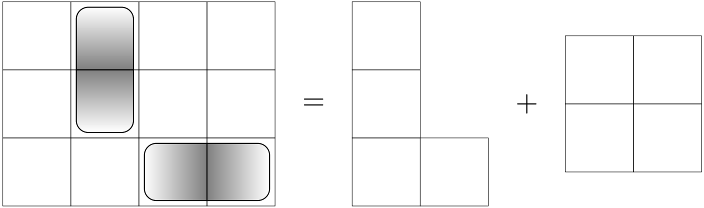
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0 (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



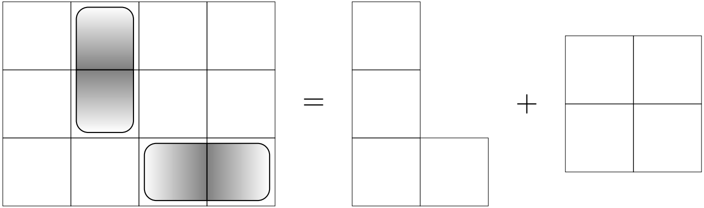
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



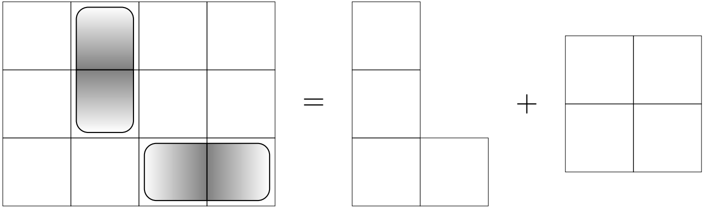
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



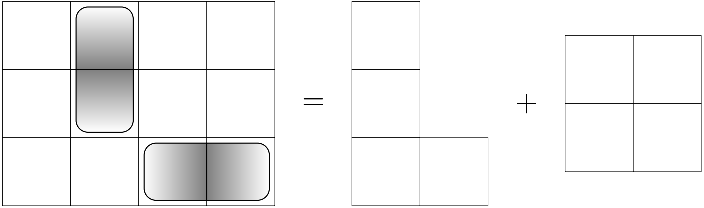
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



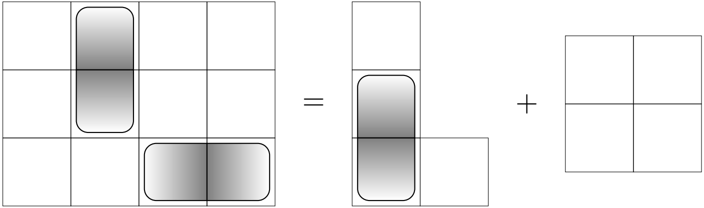
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



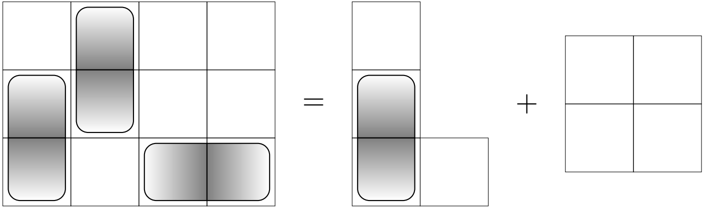
- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0 (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Przykład dekompozycji pozycji Crama



- przedstawiona pozycja Crama jest sumą dwóch składowych,
- których nimbery wynoszą kolejno 2 i 0
  (dowód pozostawiam jako ćwiczenie);
- nimber całej pozycji wynosi więc $2 \oplus 0 = 2$
- i ponieważ $2 \neq 0$, to jest ona wygrana;
- ruch zapewniający zwycięstwo, zmienia składową o nimberze 2 tak, by miała ona nimber 0;
- po ruchu cała pozycja ma nimber $0 \oplus 0 = 0$ i jest przegrana.

Gra Chop

W grze Chop:

- planszą jest prostokąt, podzielony siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na przecięciu planszy w pionie lub poziomie wzdłuż linii siatki na dwie niepuste części, i odrzuceniu jednej z nich;
- wygrywa gracz, który doprowadzi do planszy 1×1, pozbawionej możliwości wykonania ruchów.

Zadanie: policzyć nimber pozycji o wymiarach $c \times r$.

Gra Chop

W grze Chop:

- plansza jest prostokąt, podzielony siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na przecięciu planszy w pionie lub poziomie wzdłuż linii siatki na dwie niepuste części, i odrzuceniu jednej z nich;
- wygrywa gracz, który doprowadzi do planszy 1×1, pozbawionej możliwości wykonania ruchów.

Zadanie: policzyć nimber pozycji o wymiarach $c \times r$.

Gra Chop

W grze Chop:

- planszą jest prostokąt, podzielony siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na przecięciu planszy w pionie lub poziomie wzdłuż linii siatki na dwie niepuste części, i odrzuceniu jednej z nich;
- wygrywa gracz, który doprowadzi do planszy 1×1, pozbawionej możliwości wykonania ruchów.

Zadanie: policzyć nimber pozycji o wymiarach $c \times r$.

Gra Chop

W grze Chop:

- planszą jest prostokąt, podzielony siatką na kwadratowe pola;
- ruch polega na przecięciu planszy w pionie lub poziomie wzdłuż linii siatki na dwie niepuste części, i odrzuceniu jednej z nich;
- wygrywa gracz, który doprowadzi do planszy 1×1, pozbawionej możliwości wykonania ruchów.

Zadanie: policzyć nimber pozycji o wymiarach $c \times r$.

Bibliografia

1. C. L. Bouton, „*Nim, a game with a complete mathematical theory*", 1901-1902, Annals of Mathematics, 3 (14): 35–39.
2. R. P. Sprague, „*Über mathematische Kampfspiele*", 1935-36, Tohoku Mathematical Journal, 41: 438-444.
3. P. M. Grundy „*Mathematics and games*", 1939, Eureka, 2: 6-8.
4. E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, „*Winning Ways for your Mathematical Plays*", 2001-2004, Vol. I-IV